לוגיקה (1) תר 2 פתרונות

1. שימו לב שחלק מהמשפטים מתאימים יותר לכתיבה באחת השפות, למרות שכולם ניתנים לכתיבה בשתיהן.

(א)

i. $\exists xyz[x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq x \wedge G(x,y) \wedge G(y,z) \wedge G(x,z)]$

ii. $\forall xy[G(x,y) \rightarrow \exists z[(z \neq y \wedge G(x,z)) \vee (z \neq x \wedge G(y,z))]$

iii. $\exists x_1x_2x_3x_4 \bigwedge_{1\leq i<j\leq 4} x_i \neq x_j \wedge \forall y[x_1 = y \vee x_2 = y \vee x_3 = y \vee x_4 = y]$

iv. $\exists x_1x_2x_3x_4[G(x_1,x_2) \wedge G(x_3,x_4) \wedge \neg(x_1 = x_3 \wedge x_2 = x_4) \wedge \neg(x_1 = x_4 \wedge x_2 = x_3) \wedge$
$\forall y_1y_2(G(y_1,y_2) \rightarrow ((x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2) \vee (x_1 = y_2 \wedge x_2 = y_1) \vee (x_3 = y_1 \wedge x_4 = y_2) \vee (x_3 = y_2 \wedge x_4 = y_1))]$

v. $\exists x\exists y_1y_2y_3[y_1 \neq y_2 \wedge y_2 \neq y_3 \wedge y_1 \neq y_3 \wedge G(x,y_1) \wedge G(x,y_2) \wedge G(x,y_3)]$

(ב)

i. $\exists x_1x_2x_3\exists y_1y_2y_3[x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge G(x_1,y_1) \wedge G(x_2,y_1) \wedge G(x_2,y_2) \wedge G(x_3,y_2) \wedge G(x_1,y_3) \wedge G(x_3,y_3)]$

ii. $\forall x[E(x) \rightarrow \exists yz(E(y) \wedge V(z) \wedge y \neq x \wedge G(z,x) \wedge G(z,y)]$

iii. $\exists x_1x_2x_3x_4[V(x_1) \wedge V(x_2) \wedge V(x_3) \wedge V(x_4) \wedge \bigwedge_{1\leq i<j\leq 4} x_1 \neq x_j \wedge \forall y(V(y) \rightarrow (x_1 = y \vee x_2 = y \vee x_3 = y \vee x_4 = y)]$

iv. $\exists xy[E(x) \wedge E(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z(E(z) \rightarrow (x = z \vee y = z))]$

v. $\exists x_1x_2x_3y\exists uvw[x_1 \neq y \wedge x_2 \neq y \wedge x_3 \neq y \wedge x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_3 \neq x_2 \wedge (x_1,u) \wedge G(y,u) \wedge G(x_2,w) \wedge G(y,w) \wedge G(x_3,v) \wedge G(y,v)]$

2.

(א) ראשית לכל מחרוזת σ: נסמן ב-$left(\sigma)$ את מספר הסוגרים השמאליים המופיעים ב-σ, וב-$right(\sigma)$ את מספר הסוגרים הימניים המופיעים ב-σ.
כעת נוכיח את (א): פסוק יסודי הוא מאוזן (אין בו סוגריים). נתבונן בפסוק מהצורה $\neg(\phi)$. בשתי הרישאות $\neg$ ו-$\neg($ יש 0 ו-1 סוגרים שמאליים בהתאמה ואין סוגרים ימניים ולכן הן חוקיות. נתבונן ברישא $\neg(\phi'$ כאשר ϕ' רישא (לאו דוקא ממש) של ϕ. לפי הנחת האינדוקציה (ϕ הוא פסוק ולכן מאוזן מבחינת הסוגרים) $left(\phi') \geq right(\phi')$ אבל $left(\phi) = left(\phi') + 1$ ו-$right(\phi) \geq right(\phi)$ לכן $left(\phi) > right(\phi')$ כנדרש.
נתבונן בפסוק מהצורה $(\phi)\Box(\psi)$. ברור שהרישא (חוקית. הרישא $(\phi'$ כאשר ϕ' רישא של ϕ חוקית (אותה הוכחה כמו במקרה של קשר השלילה). הרישא (ϕ) חוקית כי $left((\phi)) = right((\phi))$ (לפי הנחת האינדוקציה על ϕ) וכנ"ל הרישא $(\phi)\Box$. נתבונן ברישא $\chi = (\phi)\Box(\psi'$ כאשר ψ' רישא של ψ. אזי $right(\chi)right(\phi)+right(\psi')+1$ ו-$left(\chi) = left(\phi)+left(\psi')+2$ ולכן ע"י הפעלת הנחת האינדוקציה על ϕ ו-ψ נקבל $left(\chi) \geq right(\chi)$ (למעשה אפילו אי שויון חריף) כנדרש. באותו אופן נקבל $left((\phi)\Box(\psi)) = right((\phi)\Box(\psi))$ ובכך סיימנו.

(ב) לפסוק יסודי יש רק רישא ממש אחת שהיא המחרוזת הריקה שאינה פסוק. נתבונן בפסוק מהצורה $\neg(\phi)$. ברור שהרישא $\neg$ אינה פסוק. ברישאות $\neg($ ו-$\neg(\phi'$ כאשר ϕ' רישא (לאו דוקא ממש) של ϕ יש יותר סוגרים שמליים מאשר סוגרים ימניים (אנו משתמשים בהנחת האינדוקציה ובסעיף (א)) ולכן הן אינן פסוקים.
נתבונן בפסוק מהצורה $(\phi)\Box(\psi)$. הקושי העיקרי הוא להוכיח כי הרישא (ϕ) אינה פסוק. לשם כך נשים לב כי בכל רישא ממש של (ϕ) מספר הסוגרים השמאליים גדול ממספר הסוגרים הימניים לכן היא אינה ביטוי מאוזן. אבל אם נניח בשלילה ש-(ϕ) פסוק אז בהכרח הוא מהצורה $(\phi) = (\phi_1)\Box(\phi_2)$ עבור פסוקים ϕ_1, ϕ_2 (כי הוא מתחיל בסוגר שמאלי) ואז $(\phi_1$ היא רישא ממש של (ϕ) והיא ביטוי מאוזן בסתירה.
הרישא $(\phi)\Box$ של $(\phi)\Box(\psi)$ אינה פסוק כי פסוק לא יכול להסתיים בסימן קשר. לגבי שאר הרישאות של $(\phi)\Box(\psi)$ קל לראות כי הן אינן מאוזנות מבחינת הסוגרים.

(ג) לפסוק יסודי P, $m(P) = N(P) = 0$ כנדרש. נתבונן בפסוק מהצורה $\neg(\phi)$. מהנחת האינדוקציה נקבל $left(\phi) = 2 \cdot n(\phi) + m(\phi)$. כמו כן ברור $left((\phi)) = left(\phi) + 1$, $n(\neg(\phi)) = n(\phi)$ ו-$m(\neg(\phi)) = m(\phi) + 1$ ולכן קיבלנו $keft(\neg(\phi)) = 2 \cdot n(\neg(\phi)) + m(\neg(\phi))$ כנדרש. נתבונן בפסוק מהצורה $\chi = (\phi)\Box(\psi)$. צהנחת האינדוקציה מתקיים $left(\psi) = 2 \cdot n(\psi) + m(\psi)$ ו-$left(\phi) = 2 \cdot n(\phi) + m(\phi)$. כמו כן ברור $left(\chi) = left(\phi) + left(\psi) + 2$, $m(\chi) = m(\phi) + m(\psi)$ ו-$n(\chi) = n(\phi) + n(\psi) + 1$. ולכן קיבלנו $left(\chi) = 2 \cdot n(\chi) + m(\chi)$ כנדרש.

.3

(א) פסוק. סדרת יצירה:
$Q, P, (Q) \wedge (P), R, ((Q) \wedge (P)) \to (R), (P) \to (((Q) \wedge (P)) \to (R))$

(ב) לא פסוק. הרישא $(P) \to (R)$ היא רישא ממש שהיא פסוק.

(ג) לא פסוק. זו מחרוזת שהיא רישא ממש של פסוק למשל $(Q) \vee (R)$ ולכן אינה פסוק לפי שאלה 2. (ב).

(ד) לא פסוק לפי 2. (ג). אם נסמן את המחרוזת ב-ϕ נקבל: $left(\phi) = 2 < 3 = 2 \cdot n(\phi) + m(\phi)$.

(ה) לא פסוק. הרישא הראשונה של המחרוזת שהיא מאוזנת אינה פסוק.

(ו) לא פסוק. מחרוזת לא מאוזנת מבחינת הסוגרים.

(ז) לא פסוק. לפי 2. (ב).